模块七 函数构造思想

第 1 节 原函数构造（★★★）

强化训练

1．（2023·西安模拟·★★）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=3$，且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 恒有 $f'(x)<2(x\in\mathbf{R})$，则不等式 $f(x)<2x+1$ 的解集为（　　）

（A）$(1,+\infty)$　　（B）$(-\infty,-1)$　　（C）$(-1,1)$　　（D）$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

答案：A

解析：所给的含 $f'(x)$ 的不等式的各部分都容易看出原函数，直接移项构造即可，

因为 $f'(x)<2$，所以 $f'(x)-2<0$，设 $g(x)=f(x)-2x$，则 $g'(x)=f'(x)-2<0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，

给了 $f(1)$，我们算一下 $g(1)$，看能否与要解的不等式联系起来，又 $f(1)=3$，所以 $g(1)=f(1)-2=1$，

故 $f(x)<2x+1$ 即为 $f(x)-2x<1$，也即 $g(x)<g(1)$，结合 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘可得 $x>1$.

2．（2023·广州一模·★★★）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，其导函数为 $f'(x)$，若 $xf'(x)-1<0$，$f(\mathrm{e})=2$，则关于 x 的不等式 $f(\mathrm{e}^x)<x+1$ 的解集为_____.

答案：$(1,+\infty)$

解析：所给不等式中只有 $f'(x)$，没有 $f(x)$，故同除以 x，把 $f'(x)$ 孤立出来，即可看出原函数，

由题意，$xf'(x)-1<0(x>0)$，所以 $f'(x)-\dfrac{1}{x}<0$，设 $g(x)=f(x)-\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{x}<0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，要解不等式 $f(\mathrm{e}^x)<x+1$，肯定要往 $g(x)$ 的形式去化，

不等式 $f(\mathrm{e}^x)<x+1\Leftrightarrow f(\mathrm{e}^x)-x<1\Leftrightarrow f(\mathrm{e}^x)-\ln\mathrm{e}^x<1\Leftrightarrow g(\mathrm{e}^x)<1$ ①，

又 $f(\mathrm{e})=2$，所以 $g(\mathrm{e})=f(\mathrm{e})-\ln\mathrm{e}=1$，故不等式①即为 $g(\mathrm{e}^x)<g(\mathrm{e})$，所以 $\mathrm{e}^x>\mathrm{e}$，解得：$x>1$.

【反思】若所给 $f'(x)$ 的不等式中没有 $f(x)$，则常通过变形孤立 $f'(x)$，与其余部分一起构造原函数.

3．（2022·怀化模拟·★★★）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，当 $x>0$ 时，$f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}<0$，若 $a=2f(1)$，$b=f(2)$，$c=4f(\dfrac{1}{2})$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$c<b<a$　　（B）$c<a<b$　　（C）$a<b<c$　　（D）$b<a<c$

答案：D

解析：因为当 $x>0$ 时，$f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}<0$，所以 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x}<0$，结合 $x>0$ 可得 $xf'(x)-f(x)<0$，

看到 $xf'(x)-f(x)$，想到构造 $\dfrac{f(x)}{x}$，设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，要比较的 a，b，c 涉及 $f(1)$，$f(2)$，$f(\frac{1}{2})$，故先看看 $g(1)$，$g(2)$，$g(\frac{1}{2})$ 的大小，

因为 $0<\frac{1}{2}<1<2$，所以 $g(\frac{1}{2})>g(1)>g(2)$，故 $\dfrac{f(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}>\dfrac{f(1)}{1}>\dfrac{f(2)}{2}$，

各项同乘以 2 可得 $4f(\frac{1}{2})>2f(1)>f(2)$，即 $c>a>b$，也即 $b<a<c$.

4．（2023•天津模拟•★★★）已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $2f(x)+xf'(x)>0$ 成立，且 $f(2)=\frac{1}{2}$，则不等式 $f(x)-\frac{2}{x^2}>0$ 的解集为（　　）

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(-2,0)\cup(0,2)$　　（C）$(0,2)$　　（D）$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

答案：D

解析：$2f(x)+xf'(x)$ 中 $f(x)$ 的系数多了个 2，不能构造 $xf(x)$，可乘以 x 化为 $2xf(x)+x^2f'(x)$，构造 $x^2f(x)$，

设 $g(x)=x^2f(x)$，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $g(x)$ 也为偶函数，且 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]$，

由题意，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$2f(x)+xf'(x)>0$，所以 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

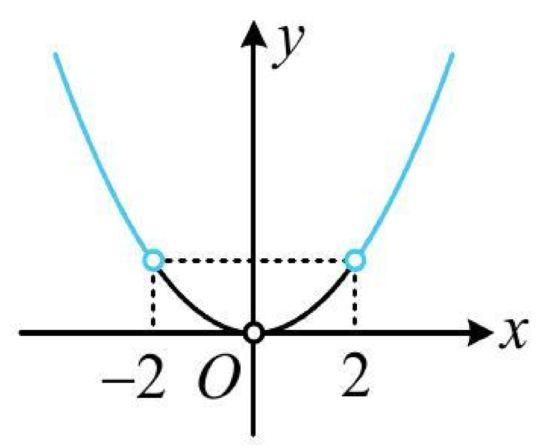
有了 $g(x)$ 的单调性，故将目标不等式往 $g(x)$ 化，

$f(x)-\frac{2}{x^2}>0\Leftrightarrow x^2f(x)-2>0\Leftrightarrow x^2f(x)>2\Leftrightarrow g(x)>2$ ①，

又因为 $f(2)=\frac{1}{2}$，所以 $g(2)=4f(2)=2$，故不等式①等价于 $g(x)>g(2)$，

要解此不等式，不妨画出 $g(x)$ 的草图来看，

由 $g(x)$ 为偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上↗可得 $g(x)$ 的草图如图，由图可知 $g(x)>g(2)\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.



5．（2023•郑州模拟•★★★）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(-x)=f(2+x)$，$f(2)=1$，则不等式 $f(x)<e^x$ 的解集为（　　）

（A）$(-2,+\infty)$　　（B）$(0,+\infty)$　　（C）$(1,+\infty)$　　（D）$(2,+\infty)$

答案：B

解析：因为 $f'(x)<f(x)$，所以 $f'(x)-f(x)<0$，

上式中 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 只有系数的差别，可用 e^x 来调节，由于是差，故应构造商的结构，

设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-e^xf(x)}{(e^x)^2}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，所以 $g(x)$ 在 **R** 上↘，

要解的不等式可化为 $\dfrac{f(x)}{e^x}<1$，即 $g(x)<1$，故必须找到右侧的 1 是 $g(x)$ 哪里的函数值，才能用单调性求解，

给出了 $f(2)=1$，但 $g(2)=\dfrac{f(2)}{e^2}\neq 1$，所以利用 $f(-x)=f(2+x)$ 把 $f(2)$ 转移到另一点的函数值上来看，

在 $f(-x)=f(2+x)$ 中取 $x=0$ 可得 $f(0)=f(2)=1$，所以 $g(0)=\dfrac{f(0)}{e^0}=1$，

故 $f(x)<e^x \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{e^x}<1 \Leftrightarrow g(x)<g(0)$，结合 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘可得 $x>0$.

6.（2023·四省联考·★★★）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数存在，且 $f'(x)<g'(x)$，则当 $x\in(a,b)$ 时，有（　　）

（A）$f(x)<g(x)$　　（B）$f(x)>g(x)$　　（C）$f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$　　（D）$f(x)+g(b)<g(x)+f(b)$

答案：C

解析：$f'(x)<g'(x)$ 的左右两侧的原函数都容易看出来，故直接移项即可构造原函数，

因为 $f'(x)<g'(x)$，所以 $f'(x)-g'(x)<0$，设 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，从而当 $x\in(a,b)$ 时，$a<x<b$，故 $F(a)>F(x)>F(b)$，

即 $f(a)-g(a)>f(x)-g(x)>f(b)-g(b)$，由 $f(a)-g(a)>f(x)-g(x)$ 可得 $f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$，故选 C.

7.（2023·绵阳模拟·★★★★）设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)+f'(x)>2$，$f(0)=2024$，则不等式 $f(x)>2+\dfrac{2022}{e^x}$ 的解集为（　　）

（A）$(2020,+\infty)$　　（B）$(0,+\infty)$　　（C）$(2022,+\infty)$　　（D）$(-\infty,0)\cup(2020,+\infty)$

答案：B

解析：条件中有 $f(x)+f'(x)$，$e^x f(x)$ 求导后会出现这一结构，故将条件凑成该函数求导的结果，

因为 $f(x)+f'(x)>2$，所以 $f(x)+f'(x)-2>0$，故 $e^x[f(x)+f'(x)]-2e^x>0$，

设 $g(x)=e^x f(x)-2e^x(x\in\mathbf{R})$，则 $g'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]-2e^x>0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

有了 $g(x)$ 的单调性，当然把目标不等式往 $g(x)$ 化，

$f(x)>2+\dfrac{2022}{e^x} \Leftrightarrow e^x f(x)>2e^x+2022 \Leftrightarrow e^x f(x)-2e^x>2022 \Leftrightarrow g(x)>2022$ ①，

又 $f(0)=2024$，所以 $g(0)=e^0 f(0)-2e^0=f(0)-2=2022$，故不等式①即为 $g(x)>g(0)$，

结合 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗可得 $x>0$.

8.（2022·重庆模拟·★★★★）已知 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$f(x)=f(-x)$，且对任意的 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$f'(x)\cos x>f(-x)\sin(-x)$，则下列不等式成立的是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}f(-\dfrac{1}{2})<f(-\dfrac{\pi}{6})\cos\dfrac{1}{2}$　　（B）$f(-\dfrac{\pi}{6})>\dfrac{\sqrt{6}}{2}f(-\dfrac{\pi}{4})$

（C）$f(-1)<\sqrt{2}f(\dfrac{\pi}{4})\cos 1$　　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}f(\dfrac{\pi}{4})>f(-\dfrac{\pi}{3})$

答案：A

解析：因为 $f(x)=f(-x)$，$\sin(-x)=-\sin x$，所以 $f'(x)\cos x>f(-x)\sin(-x)$ 即为 $f'(x)\cos x>-f(x)\sin x$，

也即 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0(0<x<\frac{\pi}{2})$ ①，看到 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x$ 这一结构，想到构造 $y=\frac{f(x)}{\cos x}$，

设 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}(0<x<\frac{\pi}{2})$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)\cos x-(-\sin x)f(x)}{\cos^2 x}=\frac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}$，

结合①可得 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上↗，

选项中涉及的自变量有正有负，可用 $f(x)$ 的奇偶性全部化负为正来分析，

因为 $f(x)=f(-x)$，所以 A 项等价于 $\frac{\sqrt{3}}{2}f(\frac{1}{2})<f(\frac{\pi}{6})\cos\frac{1}{2}$，因为 $\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$，所以 $g(\frac{1}{2})<g(\frac{\pi}{6})$，

即 $\frac{f(\frac{1}{2})}{\cos\frac{1}{2}}<\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，化简得：$\frac{\sqrt{3}}{2}f(\frac{1}{2})<f(\frac{\pi}{6})\cos\frac{1}{2}$，故 A 项正确；

单选题做到此已可结束，我们把选项 B 也分析一下，C、D 两项的分析方法与之相同，不再赘述，

B 项等价于 $f(\frac{\pi}{6})>\frac{\sqrt{6}}{2}f(\frac{\pi}{4})$，因为 $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}$，所以 $g(\frac{\pi}{6})<g(\frac{\pi}{4})$，从而 $\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\cos\frac{\pi}{6}}<\frac{f(\frac{\pi}{4})}{\cos\frac{\pi}{4}}$，故 $\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}<\frac{f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

化简得：$f(\frac{\pi}{6})<\frac{\sqrt{6}}{2}f(\frac{\pi}{4})$，所以 B 项错误.